

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963 - 003

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

W. Kuyk

30 maart 1963

Delers van het kransprodukt



1963

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

W. KUYK.

30 maart 1963

Delers van het kransprodukt.

1. Inleiding.

Het kransprodukt is één van de manieren om, uitgaande van twee groepen A en B, nieuwe groepen te vormen (zie [1], [2] en [3]). Dit kransprodukt (notatie $A \wr B$) kan op verschillende manieren gedefinieerd worden, bijv. als permutatiegroep door uit te gaan van permutatiegroepen A en B, maar ook als abstracte groep.

In het eerste geval is de structuur van $A \wr B$ afhankelijk van de representatie die voor B gekozen is. Kiest men echter voor B een representatie die (permutatie-)isomorf is met de reguliere representatie dan is $A \wr B$ isomorf met de abstracte groep $A \wr B$ (zie [2], §3).

Een tweede manier om uit A en B nieuwe groepen te vormen is het nemen van de groepuitbreidingen van A met B. G heet groepuitbreiding van A met B als G de groep A als normaal-deler bevat, met factorgroep B: $G/A \cong B$. We zullen o.a. bewijzen dat alle groepuitbreidingen G van A met B een kopie bezitten in de (abstracte) groep $A \wr B$.

2. Definitie $A \wr B$. Stelling.

Definitie: We representeren zowel A als B op de (rechts-) reguliere wijze. Het (onbeperkte) kransprodukt $A \wr B$ van A en B is dan de groep van alle permutaties p op het cartesische produkt $B \times A$, van de vorm,

$$(1) \quad p(b,a) = (\bar{b}b, \bar{a}_b a) \quad , \quad b \in B, a \in A,$$

waarbij voor elke $b \in B$, $\bar{a}_b$ een willekeurig element van A is welke een rechtstranslatie van de tweede coördinaten van de paren (b,a) bewerkt, terwijl voor verschillende b de keuzen van de $\bar{a}_b$ uit A onafhankelijk zijn. $\bar{b}$ is een willekeurig element uit B , welke een translatie van de eerste coördinaten van de paren (b,a) bewerkt.

We gaan gemakkelijk na dat de permutaties p_1 met $\bar{b}=1 \in B$, een normaaldeeler P_1 in $A \wr B$ vormen die isomorf is met het (onbeperkte) direkte groepsprodukt $\prod_{b \in B} A_b$, waarbij voor elke $b \in B$ A_b een kopie is van A . De factorgroep naar P_1 is isomorf met B en de permutaties p_2 met $\bar{a}_b=1 \in A$, vormen een deler P_2 van $A \wr B$ welke isomorf is met B . De elementen p_2 kunnen als representaties van $A \wr B$ naar P_1 worden gekozen. We hebben $A \wr B = P_1 P_2$ en $A \wr B$ werkt transitief op $B \times A$.

We merken op dat het kransprodukt niet commutatief is, maar wel associatief. Voorts dat de boven gedefinieerde groep $A \wr B$ isomorf is met de abstract gedefinieerde $A \wr B$.

Stelling 1. Elke groepuitbreiding G van A met B bezit een kopie in $A \wr B$.

Bewijs: Laat G zodanig zijn dat $G/A \cong B$. Vat G op als de (rechtsreguliere) permutatiegroep van zijn elementen. Laat $\{b'_i : i \in I\}$ een representantensysteem van G naar A voorstellen. De klassen $b'_i A$ worden onder de gekozen representatie van G gepermuteerd; deze permutaties vormen een groep die isomorf is met de reguliere representatie van B . Deze isomorfie induceert een indicering van de elementen van B : $B = \{b_i : i \in I\}$, zodanig, dat als

$$b'_i a (b'_i \text{ mod } A) = b'_k \text{ mod } A \quad \text{in } G ,$$

dan $b_1 \cdot b_i = b_k$ in B .

De klassen $M_i = b_i' A$ zijn imprimitiviteitsgebieden van de permutatiegroep G . Want rechtstranslatie van de elementen van M_i onder voorvermenigvuldiging met een willekeurig element $b_i' a \in G$ geeft:

$$\begin{aligned} b_i' a M_i &= b_i' a b_i' A = b_i' b_i' a^{(i)} A = \\ (2) \quad &= b_k' a_{(i)} a^{(i)} A = M_k, \end{aligned}$$

waarbij $a^{(i)} = b_i'^{-1} a b_i'$ en $a_{(i)}$ factoren uit A gedefinieerd door $b_i' b_i' = b_k' a_{(i)}$. Gegeven de translatie $b_i' a$ zijn de elementen $a_{(i)} a^{(i)} \in A$ en de representant b_k' ondubbelzinnig bepaald door de representant b_i' van M_i .

We vinden dus dat de verzamelingen M_i imprimitiviteitsgebieden zijn van G en G werkt transitief op de verzameling $\bigcup_{i \in I} M_i$ van zijn elementen.

Laat nu $A = \{a_j : j \in J\}$ waarin J een zekere indexverzameling. Dan definieert de toevoeging

$$b_i' a_j \longleftrightarrow (b_i, a_j)$$

een één-één toevoeging van de (transitiviteits-)gebieden van de permutatiegroepen G en $A \wr B$.

We tonen aan dat een willekeurige permutatie uit G , dus van de elementen $b_i' a_j$, te verkrijgen is als het produkt van twee permutaties uit $A \wr B$ (van de overeenkomstige elementenparen (b_i, a_j)).

Een permutatie (translatie) $b_i' a$ werkt op de M_i op de volgende wijze (2): $b_i' a_j$ gaat over in $b_k' a_{(i)} a^{(i)} a_j$.

Deze permutatie brengen we over op de paren (b_i, a_j) . Onderwerpen we (b_i, a_j) eerst aan een permutatie p_2 , gegeven

door

$$p_2(b_i, a_j) = (b_1 b_i, a_j) = (b_k, a_j)$$

en het resultaat daarvan aan p_1 , gegeven door

$$p_1(b_k, a_j) = (b_k, a_{(1)} a^{(1)} a_j) ,$$

dan heeft $p_1 p_2$ op (b_1, a_j) toegepast blijkbaar het zelfde effect als $b_1 a$, toegepast op de elementen $b_1 a_j$ uit G .

Daar de tweede coördinaten a_j van (b_k, a_j) bij vaste k onder p_1 met dezelfde factor $a_{(1)} a^{(1)}$ voorvermenigvuldigd worden en bovendien de eerste coördinaten invariant gelaten worden, is $p_1 \in P_1$. p_2 is element van P_2 . Dus $p_1 p_2 \in A \wr B$.

Opmerking: 1) Het directe groepsprodukt $A \times B$ van A en B is isomorf met de deler $P_2 A'$ van $A \wr B$, waarbij A' de diagonaal van P_1 voorstelt.

2) M. Tibiletti bewijst in verband met een geheel andere vraagstelling een bijzonder geval van stelling 1, nl. dat de groepen G die splitsen over A een kopie in $A \wr B$ bezitten.

3. Delers van $A \wr B$ als Galoisgroep.

Laat A en B eindige groepen zijn. Laat L een separabele Galoisuitbreiding zijn van een of ander lichaam K en M een separabele Galoisuitbreiding van L . Laat L/K resp. M/L de Galoisgroepen B en A bezitten. Laat N de kleinste normale lichaamsuitbreiding zijn van K die M bevat. Dan zijn er i.h.a. meerdere mogelijkheden voor de Galoisgroep G van N/K . We bewijzen dat, bij willekeurige B en voor een zekere klasse van groepen A , al deze groepen G een kopie in $A \wr B$ bezitten.

Stelling 2. Laat A een isomorfe representatie toelaten als een transitieve permutatiegroep A_r van een verzameling onbepaalden $\{X_1, \dots, X_r\}$, en laat er een lichaam k bestaan

met de eigenschap dat het deellichaam $k(A_r)$ van alle invarianten onder A_r in de zuiver transcendente uitbreiding $k(X_1, \dots, X_r)$ over k , zelf ook zuiver transcendent is over k , dan bezit, bij willekeurige B , elke groep G van de boven aangegeven soort, een kopie in $A \mathfrak{Z} B$.

Bewijs: (schets) Breidt k uit tot een lichaam K' , met de eigenschap dat K' een algebraïsche uitbreiding $K' \subset N'$ toelaat die algebraïsch disjunct is over k met $k(A_r)$ en zodanig dat N'/K' de Galoisgroep G bezit. Dit is altijd mogelijk door met transcendenten te werken. Laat K' , L' , M' en N' de lichamen zijn die overeenkomen met de lichamen K , L , M en N zoals boven aangegeven.

We tonen dan eerst aan dat N'/K' is voort te brengen door de nulwaarden van een n -de graads irreducibel polynoom ($n=r.s$; s = de orde van B) : $f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots \in K'[t]$, dat over L' uiteenvalt in s irreducibele delers $f_1, \dots, f_s$ waarvan elke f_i de Galoisgroep A_r t.o.v. L' bezit.

Laat $k(A_r) = k(U_1, \dots, U_r)$, met $U_1, \dots, U_r$ algebraïsch onafhankelijk over k . Dan is het lichaam $K'(A_r)$ van alle invarianten onder A_r in $K'(X_1, \dots, X_r)$ identiek met $K'(U_1, \dots, U_r)$.

Neem s kopieën van de uitbreiding $K'(U_1, \dots, U_r) \subset K'(X_1, \dots, X_r)$: $K'(U_{i1}, \dots, U_{ir}) \subset K'(X_{i1}, \dots, X_{ir})$ ($i=1, \dots, s$), en wel zodanig dat $U_{11}, \dots, U_{sr}$ (dus ook $X_{11}, \dots, X_{sr}$) algebraïsch onafhankelijk zijn over K' . De elementen $X_{i1}, \dots, X_{ir}$ zijn nulwaarden van een irreducibel polynoom $P_i(t) = (t - X_{i1}) \dots (t - X_{ir})$ over $K'(U_{i1}, \dots, U_{ir})$ en $K'(U_{11}, \dots, U_{sr}) = K'(U)$, met Galoisgroep $A_r^{(1)} \cong A_r$.

Men toont gemakkelijk aan dat $K'(X) = K'(X_{11}, \dots, X_{sr})$ de Galoisgroep $A_r^{(1)} \times \dots \times A_r^{(s)}$ over K' bezit. Al deze beweringen blijven gelden indien we K' door L' vervangen,

daar L' algebraïsch is over K' .

We stellen $U_{ik} = W_{1k} + W_{2k}\theta_1 + \dots + W_{sk}\theta_1^{s-1}$
 $(i=1, \dots, s; k=1, \dots, r)$, waarin $\theta_1, \dots, \theta_s$ geconjugeerden
 over K' in L' . We krijgen $L'(U) = L'(W) = L'(W_{11}, \dots, W_{sr})$,
 en $W_{11}, \dots, W_{sr}$ zijn algebraïsch onafhankelijk over L' en K' .

Het produkt $P(t) = P_1(t) \dots P_s(t)$ is nu een polynoom
 van de n -de graad over $K'(W)$ geworden, met Galoisgroep $A \wr B$
 (bewijs analoog aan het bewijs van stelling 4 (pag.48) in
 W.Kuyk: Over het omkeerprobleem van de Galoistheorie,
 1960, Amsterdam).

Het slot van het bewijs van de stelling is nu als volgt.
 We tonen aan dat het voortbrengende polynoom $f(t)$ van N'/K'
 met Galoisgroep G , zo te kiezen is dat het van $P(t)$ af te
 leiden is door in de coëfficiënten van $P(t)$ de elementen W_{ik}
 te vervangen door geschikt gekozen $k_{ik} \in K'$.

Toepassing van (een modificatie van) een stelling in
 van der Waerden: Moderne Algebra I, § 61, geeft nu dat G
 een deler van $A \wr B$ moet zijn.

Opmerking: 1) Deze stelling geeft o.a. een ander bewijs
 van stelling 1, en wel voor het geval dat B willekeurig en
 eindig is, terwijl A aan de voorwaarde van stelling 2 voldoet.

2) De groepen A die voldoen aan de voorwaarde
 uit stelling 2, zijn bijv. de groepen die behoren tot de
 volgende klasse C :

- (i) C bevat alle eindige abelse groepen.
- (ii) C bevat alle eindige symmetrische groepen.
- (iii) C bevat alle groepdelers van S_3 en S_4 .
- (iv) Als $G \in C$ en $H \in C$ dan $G \times H \in C$.
- (v) Als $G \in C$ en $H \in C$ dan $G \wr H \in C$.

Voorts voldoen de eindige p -groepen en de eindige
 spiegelingsgroepen aan de gestelde voorwaarde.

De literatuur over de zuivere transcendentie van $\kappa(A_r)$ wordt hier niet aangegeven. Vermeld worde slechts dat de resultaten hier genoemd, afkomstig zijn van E.Noether, F.Seidemann, C.Chevalley, K.Masuda, W.Gaschutz en W.Kuyk.

Literatuur:

- 1 P.Hall - Proc. Lond. Math. Soc. 36 (1933).
- 2 M.Krasner -
L.Kaloujnine - Acta Szeged 13, 14 (1950, 1951).
- 3 G.Baumschlag - Cambridge Phil. Soc. 55 (1959).
- 4 M.Tibiletti - Convz. Internaz. di Teoria
Gruppi Finiti (Firenze, Rome 1960).